

Stikprøve og population

Binomialfordeling, konfidensintervaller og test på 13,5 mio. kabaler, hvor facit er kendt.

ELEVARK · GYMNASIET (STX OG HF) · SANDSYNLIGHED OG STATISTIK

Det særlige ved data. I statistik kender man næsten aldrig sandheden. Man har en stikprøve og prøver at sige noget om populationen. Her er det anderledes. En computer har spillet 13.463.513 kabaler igennem, og for 13 af kabalerne har den prøvet *alle* de 1.000.001 udlæg, som spillet kan give (spilnummer 0 til 1.000.000). For 10 af dem er hvert udlæg enten løst, og løsningen er kontrolleret træk for træk, eller bevist umuligt. For de sidste 3 er kun ganske få udlæg endnu ikke afgjort. Derfor kender vi populationen præcis og kan se, om metoderne fra stikprøven rammer rigtigt.

Data

Filerne ligger på 7kabale-gratis.dk/data/undervisning/ og kan åbnes i Excel, Google Sheets og lignende. Kolonnerne er adskilt med semikolon.

FIL	INDHOLD
golf-stikproeve-1000.csv	1.000 tilfældigt udtrukne udlæg af golf-kabalen: spilnummer og om det kan gå op (1) eller ej (0).
baronessen-scorpion-stikproeve.csv	500 tilfældige udlæg af Baronessen og 500 af Scorpion, samme kolonner.
kabaler-oversigt.csv	Alle 26 kabaler: antal udlæg, antal der kan gå op, bevist umulige og uafgjorte.

Opgave 1. Binomialfordeling: ur-kabalen

I ur-kabalen træffer man ingen valg; blandingen afgør alt. Teoretisk går den op med sandsynligheden $p = 1/13$. Du spiller 20 ur-kabaler, hver med en ny tilfældig blanding. Lad X være antallet, der går op.

- Gør rede for, at X kan beskrives med en binomialfordeling, og angiv parametrene.
- Bestem $P(X = 0)$ og $P(X \geq 3)$.
- Bestem middelværdi og spredning for X .
- Hvor mange ur-kabaler skal man mindst spille, før sandsynligheden for, at mindst én går op, er over 50 %?

Opgave 2. Konfidensinterval: golf-kabalen

Brug `golf-stikproeve-1000.csv`. Udlæggene er trukket tilfældigt og uden tilbagelægning blandt alle 1.000.001.

- Bestem antallet af udlæg i stikprøven, der kan gå op, og stikprøveandelen $\hat{p}$.
- Bestem et 95 %-konfidensinterval for andelen af alle golf-udlæg, der kan gå op.
- Nu afslører vi populationen: af alle 1.000.001 udlæg kan 451.302 gå op. Ligger den sande andel i jeres interval? Hvad betyder "95 %" egentlig her?
- Hvor stor skal en stikprøve mindst være, for at intervallets halve bredde højst bliver 1 procentpoint, uanset hvad andelen er?

Opgave 3. Hypotesetest: er golf 50 %?

Brug igen golf-stikprøven. Test på signifikansniveau 5 % med en tosidet binomialtest. Acceptområdet er de værdier, der er tilbage, når man i hver side fjerner den største hale med sandsynlighed højst 2,5 %.

- a) En spiller påstår, at halvdelen af alle golf-kabaler kan gå op. Opstil nulhypotesen, bestem acceptområdet, og konkluder.
- b) En anden påstår, at det er 45 %. Gentag testen med $p_0 = 0,45$.
- c) En tredje mener, at golf går op lige så tit som ønskekabalen, hvor 62,27 % af alle udlæg kan gå op. Test $p_0 = 0,6227$.
- d) Sammenlign med jeres konfidensinterval fra opgave 2 og med populationen. Kan to forskellige nulhypoteser begge "overleve" den samme test? Hvad kan en hypotesetest vise, og hvad kan den ikke?

Opgave 4. Teori mod population: ur-kabalen

Af alle 1.000.001 udlæg af ur-kabalen går 76.616 op. Teorien siger 1/13.

- a) Hvor mange ville man forvente, hvis andelen var præcis 1/13? Hvad er spredningen på antallet?
- b) Er afvigelsen større, end man kan forvente? Test nulhypotesen $p = 1/13$ på 5 %-niveau. Brug normalfordelingen som tilnærmelse.
- c) Udlæggene er jo hele populationen af spillets udlæg. Hvorfor giver det alligevel mening at teste? Tænk på, hvordan spillet laver sine 1.000.001 blandinger.

Opgave 5. Er der forskel på to kabaler?

Brug `baronessen-scorpion-stikproeve.csv`.

- a) Opstil en krydstabel med kabale (Baronessen, Scorpion) og udfald (kan gå op, kan ikke gå op).
- b) Test på 5 %-niveau, om der er sammenhæng mellem kabale og udfald, med en χ^2 -test for uafhængighed.
- c) Populationen: 18,46 % af alle Baronessen-udlæg og 19,86 % af de afgjorte Scorpion-udlæg kan gå op. Der er altså en forskel. Hvorfor fandt testen den ikke? Hvad kalder man den slags fejl?
- d) (*A-niveau, åben*) Omtrent hvor store stikprøver skulle man bruge for at have en god chance for at opdage forskellen?

Opgave 6. Hvor ofte rammer intervallet?

Gå ind på 7kabale-gratis.dk/data/eksperiment/, vælg golf, og brug delen om konfidensintervaller. Lad siden trække 100 stikprøver med 100 udlæg hver og lave et 95 %-interval for hver.

- a) Hvor mange af de 100 intervaller indeholder populationens andel? Gentag nogle gange.
- b) Prøv med 20 udlæg pr. stikprøve og med ur-kabalen. Hvad sker der? Hvorfor?