

# Stikprøve og population: lærervejledning

Forløb på to moduler à 90 minutter med facit, tidsplan og pointer til samtalen.

LÆRERVEJLEDNING · GYMNASIET (STX OG HF) · SANDSYNLIGHED OG STATISTIK

## Idéen

I de fleste opgaver om stikprøver kender hverken lærer eller elever sandheden. Her gør vi. Datasættet bag 7kabale-gratis.dk har spillet 13.463.513 kabaler igennem. For 13 af kabalerne er alle de 1.000.001 udlæg, som spillet kan give, spillet igennem, og for 10 af dem er hvert eneste enten løst og kontrolleret eller bevist umuligt. Eleverne kan derfor regne et konfidensinterval eller en test på en stikprøve og bagefter se, om metoden ramte. Det gør begreber som dækningsgrad og fejl af type II til noget, man kan se, ikke kun noget, man skal tro på.

## Niveau og læreplan

- **Kernestof i matematik B (stx og hf) og A (stx), læreplanerne fra 2024:** sandsynlighedsregning og statistik.
- **Binomialfordelingen** med sandsynligheder, middelværdi og spredning (opgave 1).
- **Estimation af basissandsynligheden** (opgave 2a).
- **Hypotesetest i binomialfordelingen** med nulhypotese, alternativ hypotese, kritisk område, acceptområde og signifikansniveau (opgave 3).
- **Normalfordelingen** er kernestof på A-niveau (opgave 4).
- **Supplerende stof:** konfidensinterval for en andel (opgave 2b-d og 6) og  $\chi^2$ -test (opgave 5) er ikke kernestof i læreplanerne fra 2024.

På B-niveau kan opgave 4 springes over. Opgave 5 og konfidensintervallerne i 2b-d og 6 er supplerende stof, så brug dem, hvor de passer. 5d er en åben udfordring. Eleverne skal have et CAS-værktøj eller et regneark til binomialfordelingen.

## Tidsplan

### Modul 1

|           |                 |                                                                                                                                                         |
|-----------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0-10 min  | <b>Oplæg</b>    | Fortæl om datasættet: hvad "løst" og "bevist umulig" betyder, og at populationen er kendt. Vis gerne 7kabale-gratis.dk/data/.                           |
| 10-35 min | <b>Opgave 1</b> | Binomialfordelingen med ur-kabalen. Lad gerne eleverne spille et par ur-kabaler på 7kabale-gratis.dk/ur-kabale/ først, så de ser, at der ingen valg er. |
| 35-65 min | <b>Opgave 2</b> | Konfidensinterval på golf-stikprøven. Afslør populationen til sidst.                                                                                    |
| 65-90 min | <b>Opgave 6</b> | Dækningsgraden på den interaktive side. Saml klassens tal: hvor mange af intervallerne ramte?                                                           |

### Modul 2

|           |                 |                                                             |
|-----------|-----------------|-------------------------------------------------------------|
| 0-40 min  | <b>Opgave 3</b> | Tre test på samme stikprøve. Brug 3d til en fælles samtale. |
| 40-60 min | <b>Opgave 4</b> | Teori mod population.                                       |
| 60-90 min | <b>Opgave 5</b> | To kabaler og fejl af type II. 5d som udfordring.           |

## Om data

- Spillene vælger et spilnummer fra 0 til 1.000.000, og nummeret bestemmer blandingen. Derfor har hver kabale præcis 1.000.001 mulige udlæg.
- "Kan gå op" betyder, at udlægget kan vindes med perfekt spil, når man kender alle kort, også bunkens rækkefølge. En spiller, der ikke kan se kortene, vinder sjældnere.
- Stikprøverne i CSV-filerne er simple tilfældige stikprøver uden tilbagelægning, trukket med en fast startværdi, så de kan genskabes. Med 1.000 ud af 1.000.001 er forskellen til en stikprøve med tilbagelægning uden betydning: korrektionsfaktoren  $\sqrt{(N-n)/(N-1)}$  er 0,9995.
- Scorpion har 44 uafgjorte udlæg ud af 1.000.001. Andelen 19,86 % er regnet blandt de afgjorte; ingen af de uafgjorte er med i stikprøven.

## Facit

---

### Opgave 1

**a)** Hvert spil har to udfald (går op, går ikke op), spillene er uafhængige, fordi hver blanding er ny, og sandsynligheden er den samme,  $1/13$ , i hvert spil. Antallet af spil er fast. Altså er  $X$  binomialfordelt med  $n = 20$  og  $p = 1/13$ .

**b)**  $P(X = 0) = (12/13)^{20} \approx 0,2017$ .  $P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) = 1 - 0,2017 - 0,3362 - 0,2662 \approx 0,1959$ .

**c)**  $E(X) = 20 \cdot 1/13 \approx 1,538$  og  $\sigma(X) = \sqrt{20 \cdot 1/13 \cdot 12/13} \approx 1,192$ .

**d)** Sandsynligheden for mindst én er  $1 - (12/13)^n$ . Med  $n = 8$  er den 0,4729, med  $n = 9$  er den 0,5134. Svaret er **9 spil**. Mange elever svarer 7 (halvdelen af 13); det er en god anledning til at tale om, hvorfor sandsynligheder ikke lægges sammen.

### Opgave 2

**a)** 472 af 1.000 kan gå op, så  $\hat{p} = 0,472$ .

**b)**  $SE = \sqrt{(0,472 \cdot (1 - 0,472) / 1.000)} \approx 0,0158$ , og intervallet er  $0,472 \pm 1,96 \cdot 0,0158$ , altså **[0,441 ; 0,503]** eller [44,1 % ; 50,3 %].

**c)** Populationens andel er  $451.302 / 1.000.001 = 45,13$  %. Ja, den ligger i intervallet. "95 %" er en egenskab ved metoden, ikke ved det enkelte interval: tager man mange stikprøver og laver et interval for hver, indeholder omkring 95 % af dem den sande andel. Det enkelte interval rammer eller rammer ikke. Bemærk, at denne stikprøve tilfældigvis ligger lidt højt: 47,2 % mod 45,13 %.

**d)** Den halve bredde er størst, når  $\hat{p} = 0,5$ :  $1,96 \cdot \sqrt{(0,25 / n)} \leq 0,01$  giver  $n \geq (1,96 / 0,01)^2 \cdot 0,25 = 9.604$ .

### Opgave 3

Under nulhypotesen er  $X =$  antal, der kan gå op, binomialfordelt med  $n = 1.000$ . Acceptområdet er de værdier, der er tilbage, når man i hver side fjerner den største hale med sandsynlighed højst 2,5 %. Observeret:  $x = 472$ . P-værdien nedenfor er regnet som to gange den mindste hale.

| NULHYPOTESE   | FORVENTET | ACCEPTOMRÅDE | HALERNE            | P-VÆRDI | KONKLUSION     |
|---------------|-----------|--------------|--------------------|---------|----------------|
| a) $p = 0,50$ | 500,0     | 469 til 531  | 2,31 % /<br>2,31 % | 0,0819  | forkastes ikke |
| b) $p = 0,45$ | 450,0     | 419 til 481  | 2,24 % /<br>2,28 % | 0,1720  | forkastes ikke |

| NULHYPOTESE     | FORVENTET | ACCEPTOMRÅDE | HALERNE            | P-VÆRDI         | KONKLUSION |
|-----------------|-----------|--------------|--------------------|-----------------|------------|
| c) $p = 0,6227$ | 622,7     | 593 til 653  | 2,48 % /<br>2,18 % | under<br>0,0001 | forkastes  |

"Halerne" er sandsynligheden under nulhypotesen for at havne under og over acceptområdet.

**d)** Både 0,5 og 0,45 ligger i konfidensintervallet  $[0,441 ; 0,503]$ , og ingen af dem forkastes. Det er ingen tilfældighed: intervallet består omtrent af de værdier af  $p_0$ , som testen ikke forkaster. To nulhypoteser kan sagtens overleve samme test, og det viser, at "forkastes ikke" ikke betyder "er bevist". Populationen er 45,13 %, så påstanden om 50 % er faktisk forkert, og testen begik en fejl af type II. Strengt taget er også 45 % forkert, bare meget lidt. En test kan kun vise, at data passer dårligt med en påstand. Påstanden om ønskekabalens 62,27 % forkastes klart.

#### Opgave 4

**a)** Forventet:  $1.000.001 / 13 \approx 76.923,2$ . Spredning:  $\sqrt{(1.000.001 \cdot 1/13 \cdot 12/13)} \approx 266,5$ .

**b)** Afvigelsen er  $76.616 - 76.923,2 = -307,2$ , altså  $z = -307,2 / 266,5 \approx -1,15$ . Da  $|z| < 1,96$ , forkastes nulhypotesen ikke (tosidet p-værdi cirka 0,25). Datasættet passer med teorien.

**c)** Spillet laver blandingen ud fra spilnummeret med en tilfældighedsgenerator. De 1.000.001 blandinger er altså ikke alle de måder, et spil kort kan blandes på (der er  $52! \approx 8,07 \cdot 10^{67}$ ), men et udvalg, der gerne skulle opføre sig som tilfældige blandinger. Testen undersøger, om generatorens blandinger går op lige så tit som helt tilfældige blandinger. Data giver ingen grund til at tro andet.

#### Opgave 5

**a)**

| KABALE     | KAN GÅ OP | KAN IKKE GÅ OP | I ALT |
|------------|-----------|----------------|-------|
| Baronessen | 101       | 399            | 500   |
| Scorpion   | 103       | 397            | 500   |

**b)** Da de to rækker er lige store, er de forventede tal ens i begge rækker: 102,0 og 398,0.  $\chi^2 \approx 0,025$  med 1 frihedsgrad, og den kritiske værdi er 3,841 (p-værdi 0,05). Nulhypotesen om uafhængighed forkastes ikke: stikprøverne viser ingen signifikant forskel (20,2 % mod 20,6 %).

**c)** I populationen er forskellen 1,4 procentpoint. Med 500 udlæg i hver gruppe er standardfejlen på forskellen mellem de to andele omkring 2,5 procentpoint, så en forskel på 1,4 procentpoint drukner i den tilfældige variation. At beholde en forkert nulhypotese kaldes en fejl af type II. Pointen til eleverne: "ingen signifikant forskel" betyder ikke "ingen forskel".

**d)** Med den sædvanlige tilnærmelse for to andele (5 %-niveau, tosidet, 80 % styrke) kræver det omkring **12.500 udlæg af hver kabale**. Svar i samme størrelsesorden er fine; pointen er, at små forskelle kræver meget store stikprøver.

#### Opgave 6

Siden trækker spilnumre tilfældigt med tilbagelægning og slår udfaldet op i datasættet. Den præcise sandsynlighed for, at ét interval  $(\hat{p} \pm 1,96 \cdot SE)$  indeholder populationens andel, er:

| KABALE             | 100 UDLÆG PR. STIKPRØVE | 20 UDLÆG PR. STIKPRØVE |
|--------------------|-------------------------|------------------------|
| Golf (45,13 %)     | 94,4 %                  | 92,4 %                 |
| Ur-kabale (7,66 %) | 94,4 %                  | 79,4 %                 |

**a)** Typisk 90-98 af 100 intervaller, med et gennemsnit lidt under 95, fordi normaltilnærmelsen ikke er perfekt.

**b)** For ur-kabalen med 20 udlæg rammer kun omkring 79,4 % af intervallerne. Med  $np$  omkring 1,5 er normaltilnærmelsen dårlig. I 20 % af stikprøverne går ingen op; så er  $\hat{p} = 0$ ,  $SE = 0$ , intervallet er punktet 0, og det kan aldrig indeholde den sande andel. Golf med  $p$  nær 0,5 klarer sig langt bedre med samme  $n$ .

---

Alle tal er hentet maskinelt fra datasættet på [7kabale-gratis.dk/data/](https://7kabale-gratis.dk/data/) · Arket må frit kopieres og bruges i undervisningen (CC BY 4.0) · Har I brugt forløbet, hører vi gerne, hvordan det gik: [kontakt@7kabale-gratis.dk](mailto:kontakt@7kabale-gratis.dk)