

Går kabalen op? Lærervejledning

Forløb på to lektioner à 45 minutter med facit, tidsplan og spørgsmål til samtalen.

LÆRERVEJLEDNING · 7.-9. KLASSE · STATISTIK OG SANDSYNLIGHED

Idéen

Eleverne laver et rigtigt tilfældigt forsøg, ur-kabalen, og sammenligner med et datasæt, hvor svaret er kendt. Computeren har spillet alle 1.000.001 udlæg af ur-kabalen, og 76.616 af dem går op. Klassens relative hyppighed bliver et skøn over andelen (7,66 %), og eleverne kan se med egne øjne, at skønnet bliver bedre, jo flere spil der er med. Bagefter spiller klassen golf-kabalen, hvor dygtighed også tæller, og ser forskellen på, hvor mange spil der *kan* gå op, og hvor mange der *bliver* vundet.

Fælles Mål og prøven

Forløbet passer til disse mål i Fælles Mål for matematik efter 9. klassetrin. Kompetencemålene er bindende, færdigheds- og vidensmålene vejledende.

- **Statistik og sandsynlighed**, kompetencemålet efter 9. klassetrin (bindende): "Eleven kan vurdere statistiske undersøgelser og anvende sandsynlighed".
- **Sandsynlighed, fase 3:** "Eleven har viden om statistisk og teoretisk sandsynlighed". Den vejledende læseplan nævner erfaringer med store tals lov.
- **Statistik, fase 1:** "Eleven kan vælge relevante deskriptorer og diagrammer til analyse af datasæt".
- **Tal og algebra (tal), fase 1:** "Eleven kan anvende decimaltal, brøk og procent".
- **Matematiske kompetencer:** ræsonnement og tankegang samt kommunikation, når eleverne forklarer, hvorfor klassens tal afviger fra datasættets.

Opgavetyperne, især omregning mellem brøk, decimaltal og procent og vurdering af en relativ hyppighed, er også gode som træning til folkeskolens prøve efter 9. klasse.

Læringsmål

- Eleven kan beregne en relativ hyppighed og angive den som brøk, decimaltal og procent.
- Eleven kan skelne mellem en sandsynlighed bestemt ved forsøg og en sandsynlighed bestemt ved teori.
- Eleven kan forklare, at den relative hyppighed nærmer sig sandsynligheden, når antallet af forsøg vokser (store tals lov), og at få forsøg kan give store udsving.
- Eleven kan forklare forskellen på "kan gå op" og "går op, når jeg spiller".

Det skal I bruge

- Elevarket (tre sider) til hver elev.
- En computer, tablet eller mobil pr. elev eller pr. par. Spillene kræver ikke login, og der er ingen reklamer.
- Tavlen til klassens samlede tal.

Tidsplan

Lektion 1

0-5 min

Gæt

Fortæl kort om datasættet. Alle skriver et gæt ned (opgave 1). Saml et par gæt på tavlen uden at kommentere dem.

5-20 min	Spil	Hver elev spiller ur-kabalen 4 gange (opgave 2). Et spil tager et til to minutter.
20-35 min	Saml	Skriv elevernes tal på tavlen i rækkefølge, og udfyld tabellen og grafen i opgave 3 i fællesskab.
35-45 min	Sammenlign	Opgave 4 og 5. Brug spørgsmålene nedenfor.
Lektion 2		
0-10 min	Store tal	Opgave 6 på den interaktive side. Lad eleverne sammenligne deres tal ved 10 spil: de er meget forskellige. Ved 10.000 spil er de næsten ens.
10-25 min	Golf	Opgave 7 og 8. Skriv de tre adresser på tavlen. Et golf-spil tager to til fire minutter.
25-30 min	Afsløring	Opgave 9: fortæl, hvilket spil der ikke kan gå op.
30-45 min	Regn	Opgave 10-12. Det, der ikke bliver nået, kan blive lektie.

Spørgsmål til samtalen

1. Klassen fik ikke præcis det samme som datasættet. Har nogen regnet forkert? (*Nej. Et forsøg med 100 spil giver et skøn, og skønnet svinger fra klasse til klasse.*)
2. Kunne man blive bedre til ur-kabalen ved at øve sig? (*Nej, der er ingen valg. Det er netop derfor, den er et godt tilfældigt forsøg.*)
3. Hvorfor nærmer klassens graf sig en vandret linje? Hvad ville der ske med 1.000 spil mere?
4. Golf: hvis 45,1 % af alle udlæg kan gå op, hvorfor vandt I så ikke lige så tit?

Typiske misforståelser

ELEVEN SIGER	FORSLAG TIL SVAR
"Jeg har tabt tre gange, så nu går den nok op."	Kortene husker ikke de tidligere spil. Hvert spil har den samme sandsynlighed, uanset hvad der skete før.
"Vi fik 8 ud af 100, så sandsynligheden er 8 %."	Det er et godt skøn, men et skøn. En anden klasse får et andet tal. Kun meget mange spil giver et sikkert tal.
"Computeren snyder, den kan jo se kortene."	Ja, i golf kender computeren bunkens rækkefølge. Den måler derfor, hvor mange udlæg der <i>kan</i> gå op, ikke hvor mange en spiller vinder. I ur-kabalen betyder det intet, for der er ingen valg.

Facit

1. Ingen facit. Gættet bruges i opgave 4. Mange gætter for højt.
2. Afhænger af elevens spil. Med 4 spil er de mulige relative hyppigheder $0/4 = 0 \%$, $1/4 = 0,25 = 25 \%$, $2/4 = 50 \%$ og så videre.
3. Afhænger af klassen. Med 100 spil forventer man omkring 7,7 kabaler, der går op. I omkring 96 % af alle klasser lander tallet mellem 3 og 13. Grafen svinger meget i starten og roligere til sidst.
4. $76.616 / 1.000.001 \approx 0,0766 = 7,66 \%$, altså lidt under 8 ud af 100. Klassens tal ligger typisk et stykke derfra, fordi 100 spil er et lille forsøg.
5. Nej. I ur-kabalen er der ingen valg, så alle har den samme sandsynlighed i hvert spil. Forskellene er tilfældige. Med sandsynligheden $1/13$ er der 73 % chance for, at en elev med 4 spil ikke får nogen kabaler

op, 24 % for én og 3,2 % for to eller flere. I en klasse på 25 kan man altså forvente, at cirka 18 elever ikke får nogen op, cirka 6 får én, og typisk ingen eller en enkelt får to eller flere.

6. Ved 10 spil kan den relative hyppighed sagtens være 0 % eller 20 %. Jo flere spil, jo tættere kommer den på 7,66 %. Det er store tals lov: udsvingene fra det enkelte spil betyder mindre og mindre, når de lægges sammen med mange andre. Siden trækker tilfældige spilnumre og slår resultatet op i datasættet, så det er de rigtige udlæg, ikke en simulation af kortene.

7. Afhænger af klassen. Spil 271828 (B) kan ingen vinde, se opgave 9.

8. $451.302 / 1.000.001 \approx 45,13$ %. Klassens tal er næsten altid mindre. Grunde: Eleverne kan ikke se rækkefølgen i bunken, det kan computeren. Computeren kan prøve alle muligheder og fortryde, mens eleverne spiller hvert spil én gang. Eleverne er nye i spillet. Og tre udlæg er et lille forsøg: af netop de tre kan to gå op, så sammenligningen med 45,13 % er usikker.

9. Spil A (31415) kan gå op, spil B (271828) **kan ikke gå op**, spil C (577215) kan gå op. Har nogen tabt spil A eller C, har de ikke nødvendigvis spillet dårligt: de kunne ikke se bunken. Den, der tabte spil B, kunne slet ikke have vundet.

10. Sorteret fra den kabale, hvor flest udlæg kan gå op:

KABALE	KAN GÅ OP	ANDEL	PROCENT	OMTRENT
Napoleon	999.992	0,999991	100,0 % (99,9991 %)	næsten alle
TriPeaks	970.243	0,9702	97,0 %	næsten alle
Monte Carlo	887.713	0,8877	88,8 %	ca. 9 ud af 10
Ønskekabalen	622.655	0,6227	62,3 %	ca. 6 ud af 10
Golf	451.302	0,4513	45,1 %	ca. 5 ud af 10
Baronessen	184.648	0,1846	18,5 %	ca. 2 ud af 10
Ur-kabale	76.616	0,0766	7,7 %	ca. hver trettende

I golf kan knap hvert andet udlæg gå op, i Baronessen cirka hvert femte.

11. $1/13 \approx 0,0769 = 7,69$ %. Datasættet giver 7,66 %. De 1.000.001 udlæg er selv en slags stikprøve: spillet vælger dem med en tilfældighedsgenerator blandt alle de måder, et spil kort kan blandes på. Derfor afviger de lidt fra teorien, på samme måde som klassens tal afviger, bare meget mindre. Gymnasieforløbet regner på, om afvigelsen er større, end man kan forvente.

12. $200 \cdot 0,0766 \approx 15,3$, altså cirka 15. I gennemsnit skal man spille $1 / 0,0766 \approx 13,1$ ur-kabaler for at få én, der går op (med teorien præcis 13).

Hvis I vil videre

- **Med rigtige kort:** ur-kabalen kan lægges med et almindeligt spil kort på tre til fire minutter. Lad grupperne lægge den med kort og sammenligne med tallene fra computeren.
- **7 kabale:** af de afgjorte udlæg kan 90,16 % gå op, når man kender alle kort. Vælg et spilnummer, lad hele klassen spille det på 7kabale-gratis.dk/syvkabale/?seed=<nummer>, og sammenlign.
- **Gymnasiet:** forløbet for gymnasiet bygger videre med binomialfordeling, konfidensintervaller og test på de samme data: 7kabale-gratis.dk/undervisning/gymnasiet/.